Ogólna teoria całki
Lista 5

Zad 1. Obliczyć granice

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\int\int_{\{(x,y):\,x^2+y^2\le 2\pi\}}\sin^n(x^2+y^2)\,dx\,dy,\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\int\int_{\mathbb{R}^2_+}\frac{x^n+y^n}{1+x^n+y^n}\,e^{-x-y}\,dx\,dy,$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\int\int_{\{(x,y):\,x>0,\ x+y>0\}}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n e^{-3x-2y}\,dx\,dy,$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}\int\int_{\{(x,y):\,1<x<2,\ -1<y-x<1\}}\left(1+\left(\frac{x+y}{5}\right)^n\right)x\,dx\,dy,$$

$$e)\ \lim_{n\to\infty}\int\int_{\{(x,y):\,|x|\ge 1-\frac{1}{n},\ |y|<1-\frac{1}{n}\}}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^n dx\,dy,$$

$$f)\ \lim_{n\to\infty}\int\int\int_{\{(x,y,z):\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}} n\sin\left(\frac{xyz}{n^2}\right)e^{\left(-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}-z\right)}\,dx\,dy\,dz.$$

Zad 2. Niech $\alpha : X\to Y$ będzie odwzorowaniem mierzalnym. Pokazać, że dla każdej miary μ na X funkcja zbioru $(\mu\circ\alpha^{-1})$, gdzie

$$(\mu\circ\alpha^{-1})(\omega) := \mu(\alpha^{-1}(\omega))\qquad \text{dla mierzalnego podzbioru } \omega\subset Y$$

jest miarą na Y.

Definicja. Mówimy, że mierzalne odwzorowanie $\alpha : X\to X$ *zachowuje miarę* μ lub, że miara μ jest α-*niezmiennicza*, jeśli $\mu = \mu\circ\alpha$.

Zad 3. Sprawdzić, że odwzorowanie $\alpha : X\to X$ zachowuje miarę μ, gdzie

a) $\alpha(x) = 1-|2x-1|$, $X=[0,1]$, jest odwzorowaniem trójkątnym, $\mu = m$,

b) $\alpha(x) = 4x(1-x)$, $X=[0,1]$, jest odwzorowaniem logistycznym, μ jest miarą zadaną przez gęstość $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$,

c) $\alpha(z)=z^2$, $X=S^1=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$, jest endomorfizmem okręgu, μ jest unormowaną jednowymiarawą miarą na S^1,

d) $\alpha(x)=3x\ (mod\ 1)$, $X=[0,1)$, jest przesunięciem Markowa, μ jest miarą Cantora.

Zad 4 (Zamiana zmiennych). Pokazać, że dla dowolnego odwzorowania mierzalnego $\alpha : X\to X$ i funkcji całkowalnej f mamy

$$\int_X (f\circ\alpha)\,d\mu = \int_X f\,d(\mu\circ\alpha^{-1}).$$

Jeśli dodatkowo α jest injekcją taką, że $\alpha(X)$ jest zbiorem mierzalnym, a $\alpha^{-1} : \alpha(X)\to X$ odwzorowaniem mierzalnym, to dla każdego mierzalnego zbioru $A\subset X$ mamy

$$\int_{\alpha(A)} f\,d\mu = \int_X (f\circ\alpha)\,d(\mu\circ\alpha).$$

Zad 5. Niech μ będzie miarą Cantora. Korzystając z powyższego zadania obliczyć następujące momenty miary μ

$$a)\ \int_{[0,1]} x\,d\mu,\qquad b)\ \int_{[0,1]} x^2\,d\mu,\qquad c)\ \int_{[0,1]} x^3\,d\mu.$$

Wyznaczyć rekurencyjną formułę na n-ty moment $\int_{[0,1]} x^n\,d\mu$.

Zad 6. Niech μ będzie miarą Cantora. Wykazać formułę

$$\int_{[0,1]} e^x\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}(1+e^{\frac{2}{3^k}}).$$